

PABLO MARTÍN PRIETO

**LAS MATEMÁTICAS
EN LA EDAD MEDIA**

**Una historia de las matemáticas
en la Edad Media occidental**



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	11
1. EL PUNTO DE PARTIDA: EL TESORO MATEMÁTICO DE LA ANTIGUA GRECIA.....	19
Introducción	19
Tales de Mileto	21
Pitágoras (y los pitagóricos)	26
Platón	35
Euclides y sus <i>Elementos</i>	41
Cuadro general de la difusión y posteridad de los <i>Elementos</i> hasta el Renacimiento	48
Arquímedes.....	51
La astronomía griega antigua y la escuela de Alejandría	55
Apolonio y las cónicas	61
Nicómaco y los contenidos de la aritmética griega.....	65
Nicómaco y la aritmología o numerología	72
Apéndice sobre escritura de números en la antigua Grecia.....	74
2. LA HERENCIA ESCOLAR ROMANA Y SU CONTINUIDAD EN LAS MATEMÁTICAS DE LOS PRIMEROS SIGLOS MEDIEVALES	79
Introducción.....	79
El panorama de las matemáticas romanas.....	82
Marciano Capella.....	87
San Agustín	93
Boecio.....	99
Enciclopedistas latinos de transición a los Siglos Oscuros	104
Casiodoro.....	105
San Isidoro	106
Beda el Venerable.....	109
Apéndice sobre numeración romana.....	112

3. LAS MATEMÁTICAS EN EL RENACIMIENTO CAROLINGIO	115
Introducción.....	115
Corbie en el siglo VIII: redacciones del <i>Corpus agrimensorum</i> y el Pseudo-Boecio <i>Geometria I</i>	117
El Pseudo-Beda <i>De arithmetice propositionibus</i>	121
Matemáticas en torno a la corte de Carlomagno o escuela de Aquisgrán	125
Alcuino de York.....	126
Después de Alcuino	134
4. EL LEGADO MATEMÁTICO ÁRABE Y SU RECEPCIÓN EN OCCIDENTE: ELEMENTOS HELÉNICOS Y ORIENTALES	141
Introducción.....	141
La recepción de la ciencia (y de las matemáticas) en la cultura islámica.....	143
El Islam recibe astronomía (y cifras) de la India	145
El Islam recibe ciencia (y filosofía) de la antigua Grecia	146
Al-Khwarizmi y la introducción de las cifras indo-arábigas	148
Operaciones con cifras indo-arábigas	151
Al-Kwarizmi, los precedentes y los comienzos del álgebra árabe.....	160
Al-Khwarizmi y los problemas de herencias.....	170
Otros matemáticos posteriores a al-Khwarizmi, hasta el final del siglo X.....	171
Los cuadrados mágicos.....	173
Al-Uqlidisi y las fracciones expresadas en decimales.....	175
Omar al-Khayyam y las ecuaciones cúbicas.....	176
Al-Karaji, al-Magribi y la aritmetización del álgebra	177
5. LAS MATEMÁTICAS EN LA PLENA EDAD MEDIA, SIGLOS XI AL XIII	181
Introducción.....	181
Antes de las traducciones: culminación en el siglo XI de la tradición matemática latina alto-medieval.....	183
Otro Pseudo-Boecio: la <i>Geometria II</i>	184
El <i>Tratado sobre la cuadratura del círculo</i> de Franco de Lieja	187
El juego de la <i>Rythmomachia</i>	194
Traducciones latinas de obras matemáticas en los siglos XII y XIII	197
La segunda entrada de las cifras indo-arábigas en Occidente	205
Los primeros tratados aritméticos latinos en cifras indo-arábigas.....	206
Fibonacci.....	211
La difusión popular de las cifras indo-arábigas	219

Las cifras entran en la Universidad	220
Jordano Nemorario.....	228
Contenidos matemáticos en las obras de Alfonso X de Castilla	230
La óptica y la geometrización de la ciencia natural	235
Roberto Grosseteste.....	236
Roger Bacon.....	238
Witelo	240
Ideas matemáticas en autores escolásticos del siglo XIII.....	241
Alberto Magno	243
Tomás de Aquino.....	247
Duns Escoto	251
Raimundo Lulio.....	255
6. LAS MATEMÁTICAS EN LA BAJA EDAD MEDIA (SIGLOS XIV-XV): DE LA ESCOLÁSTICA AL RENACIMIENTO.....	259
Introducción.....	259
Thomas Bradwardine y la escuela de Merton College (Oxford).....	261
Gregorio de Rímini, el infinito y el continuo.....	272
Ideas matemáticas en obras escolásticas	273
Juan Buridán y la escuela física de París.....	274
Oresme.....	279
Progresos del álgebra en el siglo XIV: el arte de los <i>maestri d'abbaco</i>	290
Euclides en el siglo XV	291
La pintura del Renacimiento y los progresos de la perspectiva.....	293
Luca Pacioli	295
Nicolás de Cusa.....	298
Regiomontano	300
Progresos del álgebra en el siglo XV: el arte de los <i>Rechenmeister</i>	303
Nicolás Chuquet y el camino del álgebra moderna	306
CONCLUSIÓN	309
BIBLIOGRAFÍA	313
ÍNDICE ONOMÁSTICO.....	325
ÍNDICE DE OBRAS.....	331
ÍNDICE ANALÍTICO	339

INTRODUCCIÓN

El presente libro propone una síntesis introductoria al panorama de las matemáticas medievales, dentro de su contexto histórico, circunscrito en sus líneas generales al desarrollo de la cultura occidental, pero con las inevitables extensiones necesarias para recoger cuanto es imprescindible conocer de otros periodos (las matemáticas de la Antigüedad) y de otros horizontes culturales (las contribuciones al desarrollo de las matemáticas occidentales hechas desde tradiciones no europeas, como las del Oriente hindú y musulmán).

La historia de las matemáticas ha venido adquiriendo un carácter progresivamente autónomo y un campo cada vez más definido de desarrollo dentro del contexto general de los estudios sobre historia de la ciencia. La escasez relativa de estudios sobre estas materias escritos originariamente en lengua española, si se compara con la mayor atención que han merecido de autores pertenecientes a otras esferas lingüísticas (en francés, inglés, alemán¹), se corresponde bien con la posición “incómoda” que tales estudios han ocupado, a caballo de “las letras” y “las ciencias”, en relación con las estructuras institucionales educativas y de investigación. ¿Es la historia de las matemáticas un tema desatendido por ocupar un lugar “a caballo” entre las facultades e institutos de investigación que convencionalmente consideramos “de letras” y “de ciencias”? ¿Tiene la historia de las matemáticas un “lugar propio” – si cabe expresarlo así – dentro de las estructuras institucionales de la ciencia, en la universidad, por ejemplo? Aportaciones a la historia de las matemáticas, como en general a la historia de la ciencia, se pueden hacer – y de hecho se hacen – tanto desde los departamentos universitarios de matemáticas, como desde los de filosofía o

¹ Basta evocar los nombres ilustres de Marshall Clagett, Pierre Duhem, Menso Folkerts, Edward Grant, Anneliese Maier, entre otros muchos que pueden consultarse en la bibliografía del presente libro.

historia. Especialmente en los últimos años, diversas iniciativas de divulgación del conocimiento de las matemáticas han ampliado notablemente el campo de irradiación del trabajo que se hace desde las facultades de matemáticas y ciencias exactas, potencialmente en beneficio de toda la sociedad, con numerosas publicaciones de intención divulgativa, libros, revistas, cursos, ciclos de conferencias, portales de *internet*, concursos y exposiciones². También existen iniciativas emprendidas desde departamentos universitarios “de letras” para un mayor acercamiento y colaboración con los “de ciencias” en orden a la difusión del conocimiento de la historia de la ciencia y de las matemáticas³. Con todo, subsiste cierto prejuicio arraigado en la sociedad, según el cual se tiende antes a considerar “inculta” a una persona poco versada en los fundamentos elementales de la literatura o el arte, que a una persona ignorante de los rudimentos básicos de las matemáticas, como si no estar al corriente de las contribuciones de Velázquez o Cervantes pudiera ser más “grave” que desconocer las de Euclides o Newton, por ejemplo.

El libro que el lector tiene en sus manos es una obra de carácter divulgativo e introductorio, cuyo autor no es un matemático, sino un historiador (aficionado, entre otras cosas, a las matemáticas); quiere, modestamente, contribuir a llenar un cierto vacío que existe en las bibliotecas cuando se explora el tema de la historia de las matemáticas en lengua española, y más concretamente en su parte referida a la época medieval. Se dirige por igual a los alumnos de las facultades de matemáticas, de ingeniería, de filosofía y de historia que se interesan por estos temas, y en general a un amplio público lector. Un libro de historia de las matemáticas no es un libro de matemáticas; el aserto puede parecer una perogrullada, pero tiene su consecuencia lógica: tratándose de un libro de historia

² Por mencionar únicamente algunas iniciativas al respecto, cabe citar el portal Divulgamat, Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas, de la Real Sociedad Matemática Española (www.divulgamat.net), o las revistas *Suma*, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (www.revistasuma.es) y *Boletín de la Sociedad 'Puig Adam' de Profesores de Matemáticas* (www.sociedadpuigadam.es), con sus muchas actividades de divulgación y promoción del conocimiento matemático asociadas.

³ Sin ir más lejos, las mesas redondas tituladas “Matemáticas medievales” (17 de noviembre de 2011), “Ciencia e historia medieval” (14 de noviembre de 2012) y “¿Cómo eran las matemáticas medievales?” (12 de noviembre de 2014), coordinadas por el autor del presente libro en la Facultad de Geografía e Historia de la Universidad Complutense de Madrid, contando con la colaboración de destacados profesores, matemáticos e ingenieros: Miguel Aguiló Alonso (UPM), Antonio Hernando Esteban (UPM), Mercedes López García (UPM), Ricardo Moreno Castillo (UCM), Francisco Javier Peralta Coronado (UAM), María Concepción Romo Santos (UCM).

de las matemáticas, escrito por un historiador y no por un matemático, ha de servir, ante todo, para aprender historia (de las matemáticas), y no tanto para aprender matemáticas, si bien es inevitable que ayude también a refrescar la memoria sobre algunos conceptos básicos y temas matemáticos, dirigiendo la atención y la curiosidad del lector a otras obras, éstas sí propiamente libros de matemáticas, donde alcance a ampliar con mayor rigor y profundidad esas pinceladas de conocimientos matemáticos que pueda haber adquirido o recordado leyendo este libro nuestro.

Es mucho lo que se ha escrito, y lo que cabría decir, sobre el valor de la historia de las matemáticas para los estudiantes y estudiosos de las matemáticas y de la historia: ayuda a contextualizar y apreciar el mérito de las contribuciones al pensamiento matemático de acuerdo con el momento en que se hicieron; aumenta la comprensión de los problemas y de las cuestiones por indicar cuándo y cómo surgieron los interrogantes y la necesidad de resolverlos; previene contra las tentaciones de endogamia y aislamiento en el desarrollo de las distintas áreas de estudio implicadas, sugiriendo una amplitud de enfoque que pueda tener simultáneamente en cuenta esas dimensiones de la cultura que hoy se practican muchas veces dándose la espalda, aludidas esquizoidemente con las etiquetas aparentemente excluyentes de los estudios “de letras” y “de ciencias” (como si no fueran las matemáticas humanas, o como si pudieran desconocerlas los cultivadores de las humanidades).

El ámbito lógico y cronológico sobre el que centramos nuestro enfoque en este libro son las matemáticas que evolucionan y se desarrollan en el seno de la cultura occidental durante los siglos de la Edad Media. Si los mismos límites de la Edad Media como periodo histórico, y de Occidente como marco, pueden resultar en sí mismos estrechos o discutibles desde un punto de vista puramente historiográfico, la consideración de una temática como la de este libro hace necesario atender también a otros centros de interés, sin cuya comprensión no puede llegar a entenderse el objeto principal aquí tratado: las matemáticas de la Antigüedad greco-latina, con especial atención a las de los antiguos griegos, como fundamento básico imprescindible y punto de partida de toda la tradición de las matemáticas occidentales, por una parte; por otra, las importantísimas aportaciones procedentes de otros contextos culturales exteriores a Occidente, pero que intervienen decisivamente en la formación de las matemáticas

occidentales de la Edad Media: lo hemos dicho ya, Oriente (la India, el Próximo Oriente, el Islam).

El enfoque escogido (discutible como toda elección) reparte la materia por épocas, dedicando los sucesivos capítulos a periodos enteros, ampliamente considerados, del desarrollo histórico de las matemáticas: tras un capítulo primero – que puede parecer extenso, pero resulta muy parco si se compara con la riqueza de la temática que trata – dedicado a las matemáticas de la antigua Grecia, se enlazan éstas con las de la antigua Roma, cuya continuidad y prolongación es evidente en el horizonte de las matemáticas altomedievales en Occidente, confinadas a la esfera de la cultura latina; se pasa luego a resumir algunas contribuciones esenciales de las matemáticas musulmanas por cuanto tienen de intermediarias culturales entre Oriente y Occidente (también entre la antigua Grecia y nuestro medievo), y por el extraordinario impacto y repercusión que causarán en nuestra cultura a partir del siglo XII, cuando tienen lugar las grandes traducciones de ciencias y matemáticas del árabe al latín. Sendos capítulos finales pasan revista al impacto de estos nuevos aportes llegados a través del Islam en el desarrollo de las matemáticas occidentales en los periodos de la primera escolástica (en la Plena Edad Media, siglos XI-XIII) y en la última escolástica, al albor ya del Renacimiento (en la Baja Edad Media, siglos XIV y XV). Dentro de cada capítulo, se ha optado por hacer un seguimiento separado de las contribuciones individuales de cada autor, con atención más detenida para el contenido de algunas obras fundamentales. Un enfoque alternativo habría sido identificar y seguir la evolución en cada época, a través de los distintos autores y obras, de las áreas principales de las matemáticas, y así, por ejemplo, haber expuesto por separado los fundamentos y el desarrollo de la aritmética, o de la teoría de números, del álgebra, etc., lo que podría ser clarificador desde el punto de vista del rigor interno de cada área o campo de estudio, pero exigiría una quiebra constante de la continuidad cronológica (con repetidos saltos hacia atrás cada vez que se termina el estudio de una disciplina y se comienza el de otra regresando al punto temporal de partida) y repeticiones (ya hay alguna, inevitablemente) al tratar de un mismo autor en varios lugares por separado, en relación con las distintas áreas de las matemáticas a las que contribuyó.

Aunque en general resulta previsible y consagrada en la literatura disponible al respecto, en algún punto la selección de los temas y de los autores tratados en el presente libro puede parecer arbitraria: cuando ello es así, se debe sin duda al

sesgo que la personalidad de su autor inevitablemente induce en toda obra humana. En la medida en que el libro expresa o delata los límites de los conocimientos, la coloración de los intereses y el escoramiento de las preferencias de quien lo escribe, podrá considerarse “obra de autor”, si bien se ha querido que asimismo sea, en lo posible, imparcial y completo.

Con todo y ser el pensamiento matemático algo tan abstracto, un estudio que, como bellamente expresó Thomas H. Huxley, “nada debe a la observación, nada a la experiencia, nada a la inducción y nada a la casualidad”, sorprende y sigue fascinando algo que se evoca con relativa frecuencia a lo largo de este libro: lo mucho que el desarrollo de las ideas matemáticas depende de la notación escogida en cada caso. El mismo hecho de que un estilo de notación matemática, entre varios posibles, parezca o se revele como vehículo más o menos afortunado para expresar un contenido matemático concreto – sensación familiar a todo matemático y que ayuda a comprender la alternancia entre momentos de estancamiento y veloz conquista en el despliegue progresivo de la historia de las matemáticas hacia su mayor perfección –, plantea el problema de cómo dar cuenta, en una obra de este tipo, de aquellos desarrollos matemáticos del pasado de que se trata en cada caso. Hemos escogido, por motivos esencialmente prácticos (la claridad pensando en el lector actual, y también la unificación) ceñirnos con carácter general a la notación matemática comúnmente empleada y comprensible por todos en nuestro tiempo. La alternativa, ciertamente no carente de atractivo, habría supuesto exhumar y explicar minuciosamente las peculiaridades de notación propias de cada época y de cada autor, y las relaciones o equivalencias entre ellas, lo cual redundaría en una conciencia más viva y “arqueológica” de las dificultades y retos que se hubieron de ir venciendo históricamente en el desarrollo evolutivo del pensamiento matemático. Sin embargo, hemos entendido que las ventajas de una notación uniforme y actual se sobrepone a cualquier otra consideración en una obra de carácter introductorio, y no especializada, como es la presente.

En la explicación de los contenidos matemáticos de cada periodo se ha buscado un equilibrio entre la generalidad y el detalle: si algunas ideas y desarrollos se han bosquejado un tanto por encima, atendiendo sobre todo a precisar su lugar en el decurso evolutivo del pensamiento matemático, tratando de ciertas nociones, ciertos resultados y especialmente ciertas obras muy relevantes para la historia de las matemáticas (como, por ejemplo, la *Aritmética*

de Nicómaco o los *Elementos* de Euclides) se ha juzgado oportuno ralentizar el ritmo de la exposición y dedicar una mirada algo más cercana a su contenido, llegando a veces al resumen parcial de algunas de dichas obras fundamentales, deteniéndonos en ilustrar algunos puntos o ejemplos particularmente conocidos, importantes o curiosos, por lo general sin ofrecer demostraciones completas y rigurosas, sino meramente indicaciones al respecto (esa es la diferencia principal entre un libro de historia de las matemáticas, como el nuestro, y un libro de matemáticas).

Otro tipo de equilibrio buscado se refiere a la cuestión, siempre importante cuando se trata de las matemáticas, de la dosificación entre verbalización y simbolismo, que podría desdoblarse en otra dosificación paralela, entre verbalización y visualización. Explicar con palabras las nociones e ideas matemáticas es, con mucho, el procedimiento que predomina en esta obra, dirigida por igual a un público “de letras” y a un público “de ciencias”, pero al fin obra de un historiador acostumbrado a explicarse antes con palabras que con fórmulas y figuras, sin que por ello, empero, unas y otras, fórmulas y figuras, dejen de estar presentes en nuestro libro. El aparato matemático utilizado queda circunscrito dentro de un nivel elemental y, en general, no presupone en el lector conocimientos superiores a los que se adquieren en la educación obligatoria; el autor confía en que cualquier dificultad al respecto quede aclarada verbalmente en el texto. En cuanto a las ilustraciones o figuras, todas han sido materialmente confeccionadas por el autor, pero basándose sin pretensión de originalidad en las que corrientemente se encuentran en las principales obras que tratan los temas y las nociones a que se refieren, cuando no se inspiran, en algunos casos (Oresme, por ejemplo) en las figuras que acompañan los textos medievales mismos cuyas ideas ilustran. Visualmente, desean ser claras y sencillas; en general no tienen otra intención que la de ayudar a comprender el texto.

Para propósitos de referencia, se ofrece como subtítulo de cada capítulo una relación de los principales autores a los que se hace referencia en el mismo. La bibliografía final se ha procurado ordenar en apartados que en parte se remiten a la estructura del libro, pero que también incluyen otros centros de interés, como los estudios sobre la astronomía o la numerología, por ejemplo. Se han confeccionado índices de personas (incluyen a los autores clásicos y medievales de que trata la obra, pero también ocasionalmente a otros personajes de otras épocas y estudiosos contemporáneos que figuran en el cuerpo principal del texto

– no los que aparecen únicamente en las notas al pie), de obras citadas y de temas o nociones matemáticas (este último sin absoluta pretensión de exhaustividad al respecto).

Si la obra, dentro de su modestia, cumple el propósito de interesar al lector y propiciar un mayor acercamiento entre los estudiantes y estudiosos de la historia y de las matemáticas, su autor sentirá la satisfacción de un deber cumplido.